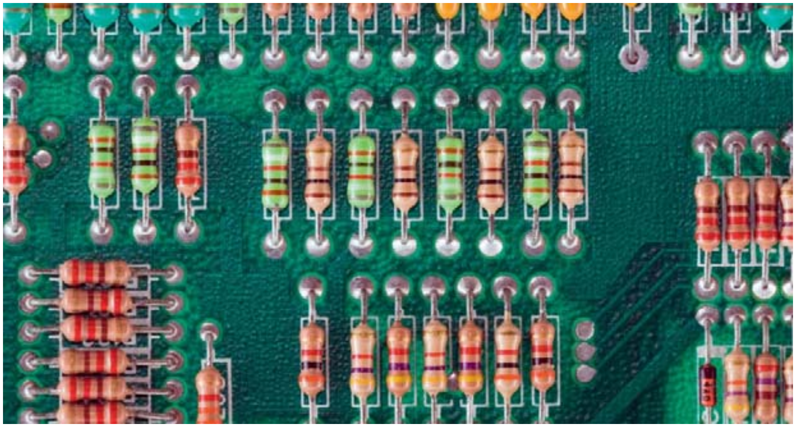
GRUNDLAGEN ELEKTROTECHNIK (7)

Das Knotenpunktpotentialverfahren

Fachartikel | 07.10.2024

Drucken Versenden

Im vorangegangenen sechsten Teil wurde das Superpositionsprinzip erläutert. Der Vorteil des Superpositionsprinzips liegt darin, dass die Berechnung der Lösung ohne das Lösen eines Gleichungssystems erfolgt. Umfangreichere Netzwerke lassen sich jedoch effizient nur mithilfe von Netzwerkanalyseverfahren berechnen, die das Lösen eines Gleichungssystems beinhalten.



(Bild: Jakub Krechowicz – stock.adobe.com)

Für die Netzwerkanalyse gibt es unterschiedliche Lösungsverfahren wie beispielsweise das Maschenstrom- und das Knotenpunktpotentialverfahren. Im folgenden Beitrag wird das

Knotenpunktpotentialverfahren erläutert. Es basiert auf der Knotenpunktpotentialanalyse. Dieses Verfahren kann außer in der Elektrotechnik auch z.B. bei der Analyse von Wärmequellennetzwerken eingesetzt werden.

Knotenpunktpotentialgleichungen

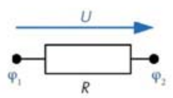


Bild 1: Definition der Knotenpotentiale
(Bild: Quelle: alle Bilder A. Baral)

Knotenpotentiale sind die elektrischen Potentiale an verschiedenen Knoten eines Netzwerks – relativ zu einem Referenzknoten. Die Differenz zweier Potentiale ist die Spannung zwischen den Knoten (**Bild 1**).

$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

Für den Strom – unter Verwendung der Potentialdefinition – ergibt sich:

$$I = \frac{U}{R}$$
$$I = U \cdot G$$
$$I = G \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Bei dem Knotenpunktpotentialverfahren wird ein System von Gleichungen aufgestellt, um die Potentiale an den Knoten eines Netzwerks zu bestimmen. Hierzu werden die folgenden fünf grundlegenden Analyseschritte durchgeführt:

- Ein Knoten des Netzwerks wird als Referenzknoten ausgewählt. An diesem Knoten wird das Potential als null definiert. Dieser Knoten entspricht somit der Masse des Systems. Die Auswahl des Knotens ist beliebig.
- Allen restlichen Knoten wird eine Variable zugeordnet, die das Potential relativ zum Referenzpunkt repräsentiert.
- Es werden die Knotenpunktpotentialgleichungen aufgestellt, die sich aus den Leitwerten der Widerstände und Quellen des Netzwerks ergeben.
- Die Koeffizienten der Knotenpunktpotentialgleichungen werden in einem Gleichungssystem einsortiert.
- Mithilfe eines allgemeinen Lösungsverfahrens wird das Gleichungssystem gelöst.

An einem einfachen Netzwerk (**Bild 2**) werden die fünf Verfahrensschritte erläutert.

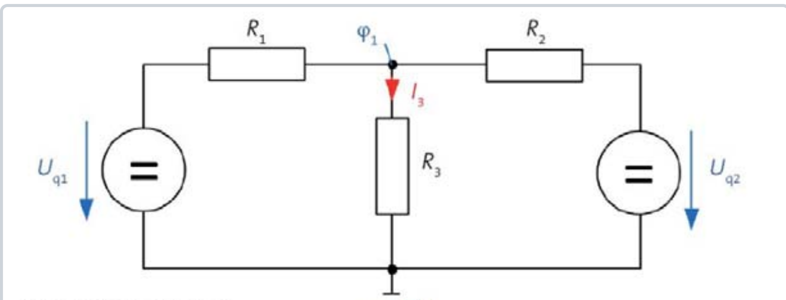


Bild 2: *Einfaches Netzwerk*

$\varphi_0 = 0\,V$

Bild 2: Beispiel einer Spannungsquelle mit Lastwiderstand

(Bild: A. Baral)

Aufstellen der Knotenpotentialgleichungen

Ein einfaches, systematisches Vorgehen, das sich sowohl in der Elektrotechnik als auch für Wärmequellennetzwerken eignet, stellt die Wandlung aller Spannungsquellen in Stromquellen dar. Die Ströme der Stromquellen lassen sich mit nachfolgender Gleichung (vgl.**Teil 6** in EMA 9.2024) bestimmen:

$$I_q = U_q \cdot G_i$$
$$I_q = \frac{U_q}{R_i}$$

Das umgewandelte Netzwerk aus Bild 2 ist in **Bild 3** dargestellt. Aus den Spannungsquellen U_{q1} und U_{q2} und den dazugehörigen seriellen Innenwiderständen R_1 und R_2 sind die Stromquellen I_{q1} und I_{q2} sowie die parallelgeschalteten Innenwiderstände R_1 und R_2 bzw. Leitwerte G_1 und G_2 geworden. Im nächsten Analyseschritt sind die Ströme (**Bild 4**) einzuzeichnen und die Knotengleichungen aufzustellen.

Der Knoten φ_0 wurde als Referenzpunkt mit dem Potential null definiert. Es ist somit in diesem Beispiel nur der Knoten 1 mit dem Potential φ_1 relevant. Die Summe der Ströme am Knoten 1 ergibt:

$$I_{q1} - I_1 - I_2 - I_3 + I_{q2} = 0$$

Die Gleichung so umsortiert, dass die Quellen auf der einen Seite und die restlichen Ströme auf der anderen Seite stehen.

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_{q1} + I_{q2}$$

Für die einzelnen Widerstände ergeben sich folgende Ströme in Abhängigkeit von den Potentialen und unter Berücksichtigung des Referenzpotentials φ_0 = 0V:

$$I_1 = G_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_0) = G_1 \cdot \varphi_1$$
$$I_2 = G_2 \cdot (\varphi_1 - \varphi_0) = G_2 \cdot \varphi_1$$
$$I_3 = G_3 \cdot (\varphi_1 - \varphi_0) = G_3 \cdot \varphi_1$$

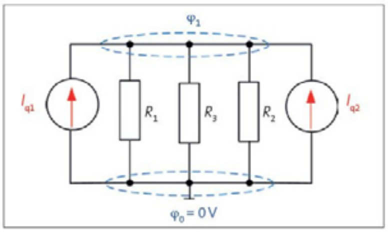
Werden die obigen Gleichungen in die Knotengleichung eingesetzt, ergibt sich:

$$G_1 \cdot \varphi_1 + G_2 \cdot \varphi_1 + G_3 \cdot \varphi_1 = I_{q1} + I_{q2}$$

Da dieses einfache Netzwerk nur eine Unbekannte, das Potential φ_1, aufweist ist die Lösung sehr einfach aus obiger Gleichung zu ermitteln. In diesem Fall ist es nicht notwendig, ein Gleichungssystem zu lösen. Das unbekannte Potential φ_1 kann direkt aus den Stromquellen und Leitwerten des Netzwerks berechnet werden.

$$\varphi_1 = \frac{I_{q1} + I_{q2}}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Nachdem das Potential φ_1 bestimmt wurde, kann mithilfe der Potentialdifferenz der jeweilige Spannungsabfall und Strom durch die Widerstände ermittelt werden. Sollen die Ströme der originalen Spannungsquellen (Bild 2) ermittelt werden, so ergeben sie sich aus der Differenz der Ersatzstromquelle und des Innenwiderstands/ Leitwertes.



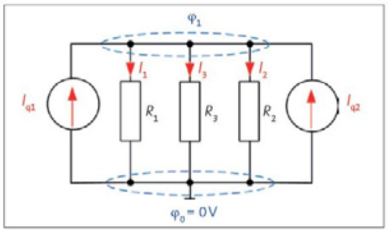


Bild 3: Ersatznetzwerk mit Stromquellen (li.) - Bild 4: Definition der Stromrichtungen (re.)

Komplexeres Beispiel für ein Gleichungssystem

Zur Vertiefung des Themas wird an einem etwas komplexeren Beispiel (**Bild 5**) gezeigt, wie ein Knotenpunktpotential-Gleichungssystem aufgestellt wird. In dem Netzwerk in Bild 5 sind zwei unbekannte Potentiale vorhanden, daher ergeben sich zwei gekoppelte Gleichungen, die mithilfe eines Gleichungssystems gelöst werden können. Die Umwandlung der Spannungsquellen in Stromquellen ergibt das Netzwerk in **Bild 6**.

Im nächsten Analyseschritt sind die Ströme (**Bild 7**) einzuzeichnen und die Knotenpunktpotentialgleichungen aufzustellen. Hier sei erwähnt, dass die Stromrichtung beliebig gewählt werden kann. Es ist jedoch beim Aufstellen der Gleichungen darauf zu achten, dass Strom und Spannung in dieselbe Richtung zeigen (Verbraucher).

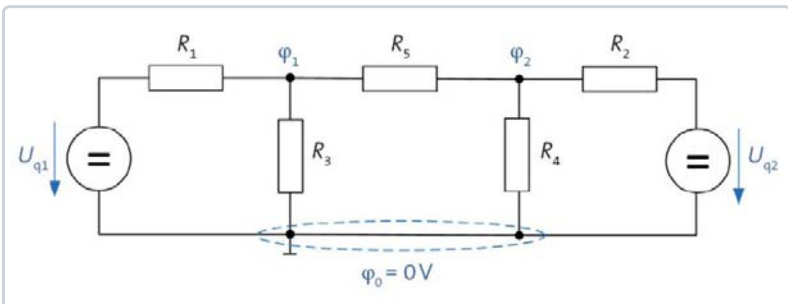
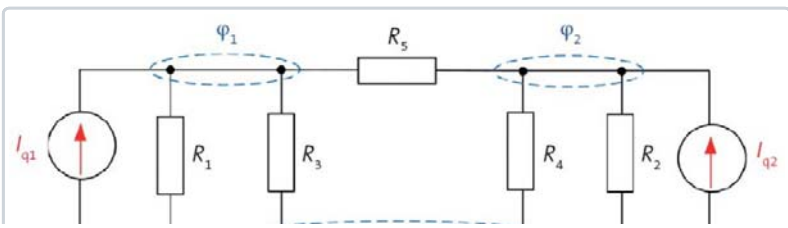


Bild 5: Komplexeres Beispiel-Netzwerk



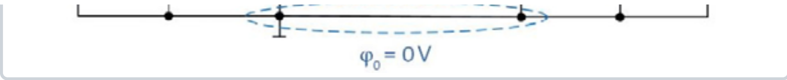


Bild 6: Netzwerk aus Bild 5 mit Stromquellen

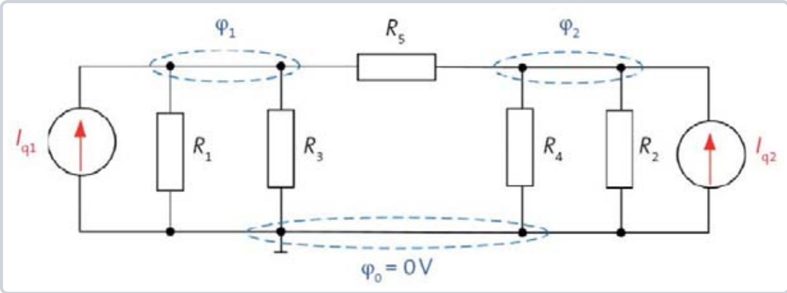


Bild 7: Definition der Stromrichtung

Knoten 1:

$$I_1 + I_3 + I_5 = I_{q1}$$
$$I_1 = G_1 \cdot \varphi_1$$
$$I_3 = G_3 \cdot \varphi_1$$
$$I_5 = G_5 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Werden die Gleichungen ineinander eingesetzt, ergibt sich die ***erste Knotenpunktpotentialgleichung*** zu:

$$(G_1 + G_3 + G_5) \cdot \varphi_1 - G_5 \cdot \varphi_2 = I_{q1}$$

Knoten 2:

$$I_2 + I_4 - I_5 = I_{q2}$$
$$I_2 = G_2 \cdot \varphi_2$$
$$I_4 = G_4 \cdot \varphi_2$$
$$I_5 = G_5 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Für die ***zweite Knotenpunktpotentialgleichung*** ergibt sich somit:

$$(G_2 + G_4 + G_5) \cdot \varphi_2 - G_5 \cdot \varphi_1 = I_{q2}$$

In beiden Gleichungen sind sowohl das Potential φ_1 als auch das Potential φ_2 eine unbekannte Größe. Aus den beiden Gleichungen kann nun ein Gleichungssystem der Dimension zwei erstellt werden:

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_3 + G_5) & -G_5 \\ -G_5 & (G_2 + G_4 + G_5) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \end{bmatrix}$$

Für die Lösung von Gleichungssystemen gibt es unterschiedliche Algorithmen wie z.B. den Gauß-Algorithmus oder die Cramer'sche Regel.

Lösung von Gleichungssystemen

Die Lösung von Gleichungssystemen unter Verwendung der

Cramer'schen Regel basiert darauf, dass die unbekannten Potentiale mithilfe von Determinanten berechnet werden. Dabei wird das Gleichungssystem in eine Matrixform gebracht und die einzelnen Variablen (Potentiale) lassen sich durch das Verhältnis der Determinanten ermitteln.

$$\varphi_1 = \frac{\det D_{\varphi_1}}{\det D}$$

$$\varphi_2 = \frac{\det D_{\varphi_2}}{\det D}$$

Die Lösung einer Determinante ist eine skalare Zahl, die mit einer quadratischen Matrix verknüpft ist. Die Methode zur Berechnung der Determinante hängt von ihrer Größe ab. Für eine kleine 2x2-Matrix ergibt sich:

$$\det D = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Für größere Matrizen, wie beispielsweise eine 3x3-Matrix, wird die Berechnung aufwendiger und folgt der Regel von Sarrus oder dem ***Laplace-Entwicklungssatz,*** bei dem Determinanten von Untermatrizen gebildet werden. Für das obige Beispiel reicht jedoch die einfache Berechnung der 2x2-Matrix:

$$\begin{aligned} \det D &= \det \begin{vmatrix} (G_1 + G_3 + G_5) & -G_5 \\ -G_5 & (G_2 + G_4 + G_5) \end{vmatrix} \\ &= (G_1 + G_3 + G_5) \cdot (G_2 + G_4 + G_5) - (-G_5)^2 \end{aligned}$$

Die Matrix $D_{\varphi 1}$ setzt sich aus dem Quellenvektor und der restlichen Leitwertmatrix D zusammen:

$$\begin{aligned} \det D_{\varphi_1} &= \det \begin{vmatrix} I_{q1} & -G_5 \\ I_{q2} & (G_2 + G_4 + G_5) \end{vmatrix} \\ &= I_{q1} \cdot (G_2 + G_4 + G_5) - I_{q2} \cdot (-G_5) \end{aligned}$$

Analog zur Determinanten $detD_{\varphi 1}$ erfolgt analog die Berechnung der Determinante $detD_{\varphi 2}$. Es ist jedoch zu beachten, dass der Quellenvektor nun in die zweite Spalte einsortiert wird:

$$\begin{aligned} \det D_{\varphi_2} &= \det \begin{vmatrix} (G_1 + G_3 + G_5) & I_{q1} \\ -G_5 & I_{q2} \end{vmatrix} \\ &= I_{q2} \cdot (G_1 + G_3 + G_5) - I_{q1} \cdot (-G_5) \end{aligned}$$

Für die beiden Potentiale ergibt aus dem Quotienten der Determinanten:

$$\varphi_1 = \frac{I_{q1} \cdot (G_2 + G_4 + G_5) - I_{q2} \cdot (-G_5)}{(G_1 + G_3 + G_5) \cdot (G_2 + G_4 + G_5) - (-G_5)^2}$$

$$\varphi_2 = \frac{I_{q2} \cdot (G_1 + G_3 + G_5) - I_{q1} \cdot (-G_5)}{(G_1 + G_3 + G_5) \cdot (G_2 + G_4 + G_5) - (-G_5)^2}$$

Da das Potential φ_0 = 0V ist, entsprechen die Potentiale φ_1 und φ_2 den Spannungen über den Widerständen R_1 bis R_4. Die Differenz der beiden Potentiale ergibt die Spannung am Widerstand R_5. Mithilfe des Ohm'schen Gesetzes lassen sich nun einfach die Ströme ermitteln.

Zur Veranschaulichung und Vertiefung des Verfahrens gibt es nun hier im Online-Beitrag ein detailliertes Zahlenbeispiel, das Schritt für Schritt die Anwendung und Berechnung verdeutlicht.

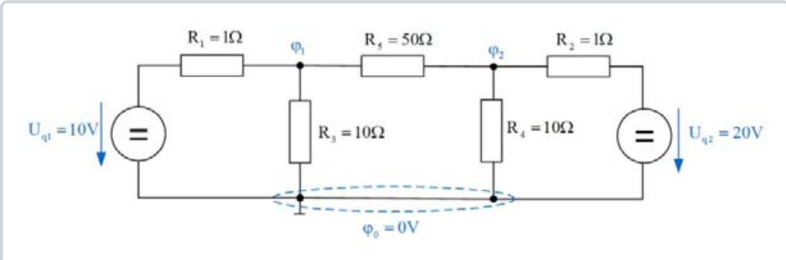


Bild 8: Ausgangssituation des Zahlenbeispiels

Zahlenbeispiel

In **Bild 8** wird ein konkretes Zahlenbeispiel für die Schaltung aus Bild 5 dargestellt, das die theoretischen Konzepte anschaulich anhand von Zahlen verdeutlicht.

Im ersten Schritt werden die Spannungsquellen in Stromquellen gewandelt:

$$I_{q1} = \frac{U_{q1}}{R_1} = \frac{10\ V}{1\,\Omega} = 10\ A$$

$$I_{q2} = \frac{U_{q2}}{R_2} = \frac{20V}{1\,\Omega} = 20\ A$$

Die Widerstände werden in Leitwerte umgerechnet, beispielsweise für den Widerstand R_1:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{1\,\Omega} = 1\,S$$

Für das Gleichungssystem, das aus zwei Gleichungen besteht, ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_3 + G_5) & -G_5 \\ -G_5 & (G_2 + G_4 + G_5) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}12\ S & -0{,}02\ S \\ -0{,}02\ S & 1{,}12\ S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\ A \\ 20\ A \end{bmatrix}$$

Die Lösung der Gleichungssystems erfolgt mithilfe der drei definierten Determinanten:

$$\begin{aligned} \det D &= \det \begin{vmatrix} 1{,}12\ S & -0{,}02\ S \\ -0{,}02\ S & 1{,}12\ S \end{vmatrix} \\ &= (1{,}12\ S \cdot 1{,}12\ S) - (-0{,}02\ S \cdot -0{,}02\ S) \\ &= 1{,}254\ S^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det D_{\varphi_1} &= \det \begin{vmatrix} 10\ A & -0{,}02\ S \\ 20\ A & 1{,}12\ S \end{vmatrix} \\ &= (10\ A \cdot 1{,}12\ S) - (20\ A \cdot (-0{,}02\ S)) \\ &= 11{,}6\ A \cdot S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det D_{\varphi_2} &= \det \begin{vmatrix} 1{,}12\ S & 10\ A \\ -0{,}02\ S & 20\ A \end{vmatrix} \\ &= (1{,}12\ S \cdot 20\ A) - ((-0{,}02\ S) \cdot 10\ A) \\ &= 22{,}6\ A \cdot S \end{aligned}$$

Mithilfe der Determinanten werden die beiden Potentiale ermittelt:

$$\varphi_1 = \frac{\det D_{\varphi_1}}{\det D} = \frac{11{,}6\ A \cdot S}{1{,}254\ S^2} = 9{,}25\ \frac{A}{S} = 9{,}25\ V$$

$$\varphi_2 = \frac{\det D_{\varphi_2}}{\det D} = \frac{22{,}6\ A \cdot S}{1{,}254\ S^2} = 18{,}02\ V$$

In **Bild 9** sind die Leitwerte, Stromquellen und Potentiale eingezeichnet. Aus den jeweiligen Potentialdifferenzen lassen sich die Spannungsabfälle bestimmen. Mithilfe des Ohm'schen Gesetzes werden dann die Ströme berechnet. Zum Beispiel ergeben sich für die Spannung und den Strom am Widerstand R_5 folgende Werte:

$$U_5 = \varphi_1 - \varphi_2 = 9,25\ V - 18,02\ V = -8,77\ V$$

$$I_5 = U_5 \cdot G_5 = -8,77\ V \cdot 0,02\ S = -0,175\ A$$

Die negativen Vorzeichen der Spannung U_5 und des Stromes I_5 bedeuten, dass der Strom I_5 nicht in die im Bild eingezeichnete und anfänglich angenommene Richtung fließt, sondern in die genau entgegengesetzte Richtung. Dies führt auch zu einer Umkehr der Spannungsrichtung am Widerstand R_5.

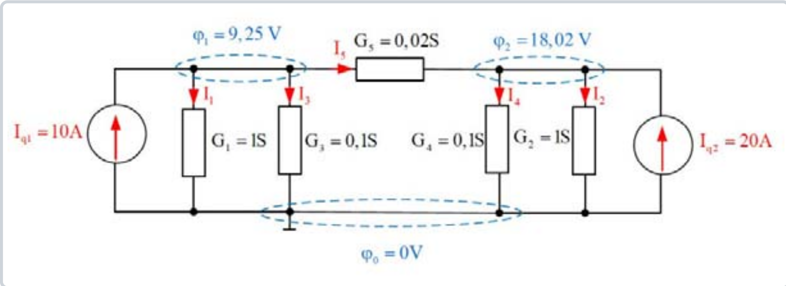


Bild 9: Ergebnisse des Zahlenbeispiels

Anwendung der Knotenpunktpotentialanalyse bei thermischen Analysen

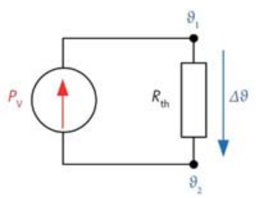


Bild 10: Thermisches Netzwerk

Eine thermische Analyse, beispielsweise einer elektrischen Maschine oder eines Gebäudes, kann mithilfe von Wärmequellennetzwerken durchgeführt werden. Dabei werden die auftretenden Verlustleistungen als Wärmequellen betrachtet, die den Stromquellen in elektrischen Netzwerken entsprechen. Der Temperaturabfall ergibt sich aus der Temperaturdifferenz zwischen den Temperaturpotentialen. In **Bild 10** ist ein sehr einfaches thermisches Netzwerk dargestellt, das aus einer Wärmequelle, die beispielsweise die Kupferverlustleistung P_V einer elektrischen Maschine repräsentieren kann, sowie einem thermischen Widerstand besteht.

In Anlehnung an das elektrische Netzwerk und das Ohm'sche Gesetz kann die Temperaturdifferenz   in einem thermischen Netzwerk auf ähnliche Weise wie die Spannung in einem elektrischen Netzwerk betrachtet werden. Entsprechend dem Prinzip des Ohm'schen Gesetzes für Wärmeübertragung wird die Temperaturdifferenz durch das Produkt des thermischen Widerstands und des Wärmeflusses (vergleichbar mit dem Strom in elektrischen Netzwerken) bestimmt:

$$\Delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2 = P_V \cdot R_{th}$$

bzw. mit dem Leitwert:

$$P_V = \frac{\Delta\vartheta}{R_{th}} = \Delta\vartheta \cdot L_{th}$$

Bei thermischen Größen entspricht die Leistung P_V dem sogenannten Wärmestrom (Wärmeleistung):

$$\dot{Q}[W]$$

In **Tabelle 1** sind die Analogien zwischen einem elektrischen und einem thermischen Ersatzschaltbild übersichtlich dargestellt. Diese Tabelle ermöglicht es, jedes thermische Wärmequellennetzwerk in ein entsprechendes elektrisches Netzwerk zu überführen. Die Struktur eines thermischen Netzwerks entspricht dabei der eines elektrischen Netzwerks, sodass dieselben Prinzipien und Methoden angewendet werden können. Insbesondere kann das Knotenpunktpotentialverfahren, das üblicherweise für elektrische Netzwerke verwendet wird, auch auf thermische Netzwerke angewendet werden, um die Temperaturverteilungen zu berechnen.

Tabelle 1: Analogie thermischer und elektrischer Größen

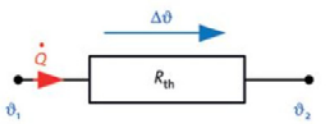
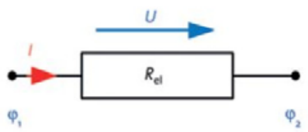
Thermische Größen	Elektrische Größen
Wärmestrom $Q[W]$	Elektrischer Strom I [A]
Wärmefluss, Wärmestromdichte $\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$	Stromdichte $J = \frac{I}{A} \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right]$
Temperatur ϑ [K; °C]	Elektrisches Potential φ [V]
Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta = \vartheta 1 - \vartheta 2$ [K; °C]	Elektrische Spannung $U = \varphi 1 - \varphi 2$ [V]
Thermischer Leitwert $L_{th} = \lambda \cdot \frac{A}{s} \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}}\right]$ • λ: Wärmeleitfähigkeit • A: Schichtquerschnitt (steht senkrecht zum Wärmestrom) • S: Schichtdicke	Elektrischer Leitwert $G_{el} = \sigma \cdot \frac{A}{\ell} \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} = \mathrm{S}\right]$ • σ: elektrische Leitfähigkeit • A: Leiterquerschnitt • ℓ: Leiterlänge
Thermischer Widerstand $R_{th} = \frac{1}{L_{th}} \left[\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}\right]$  $R_{th} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\dot{Q}} = \frac{\Delta\vartheta}{\dot{Q}}$	Elektrischer Widerstand $R_{el} = \frac{1}{G_{el}} \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\right]$  $R_{el} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{I} = \frac{U}{I}$

Tabelle 1

Mit diesem Überblick über die Berechnung kleiner elektrischer Netzwerke und die Anwendung der thermischen Analogie endet die Beitragsreihe zur Analyse von Gleichstromnetzwerken.

Im nächsten Grundlagenbeitrag wird das elektrische Feld ausführlich erläutert.

(**Ende der Beitragsreihe**)

Alle Beiträge der Reihe

- Teil 1: »Die Geschichte der Elektrotechnik – von Thales bis 5G«
- Teil 2: »Batterien und Elektronenströmung«
- Teil 3: »Der elektrische Gleichstromkreis«
- Teil 4: »Einfache Widerstandsnetzwerke«
- Teil 5: »Die DMS-Messbrücke«
- Teil 6: »Das Superpositionsprinzip«
- Teil 7: »Das Knotenpunktpotential-Verfahren«

Über den Autor

PROF. DR.-ING. ANDREAS BARAL

Elektrische Maschinen und Antriebstechnik, PHWT – Private Hochschule für Wirtschaft und Technik, Vechta