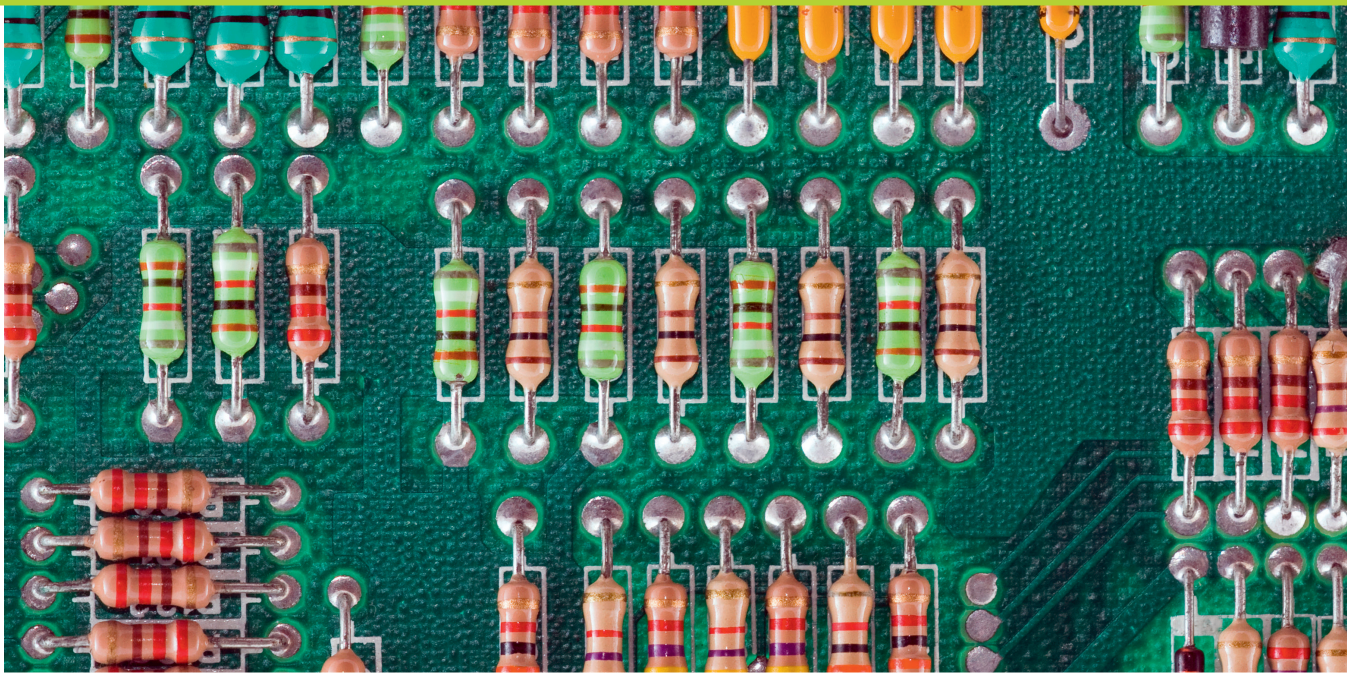


Quelle: Jakub Krechowicz – stock.adobe.com

Grundlagen der Elektrotechnik (7)

Das Knotenpunktpotentialverfahren

Autor:
Prof. Dr.-Ing. Andreas Baral, elektrische Maschinen und Antriebstechnik, PHWT – Private Hochschule für Wirtschaft und Technik, Vechta

Im vorangegangenen sechsten Teil (»de« 20.2024) wurde das Superpositionsprinzip erläutert. Der Vorteil des Superpositionsprinzips liegt darin, dass die Berechnung der Lösung ohne das Lösen eines Gleichungssystems erfolgt. Umfangreichere Netzwerke lassen sich jedoch effizient nur mithilfe von Netzwerkanalyseverfahren berechnen, die das Lösen eines Gleichungssystems beinhalten.

Für die Netzwerkanalyse gibt es unterschiedliche Lösungsverfahren wie beispielsweise das Maschenstrom- und das Knotenpunktpotentialverfahren. Im folgenden Beitrag wird das Knotenpunktpotentialverfahren erläutert. Es basiert auf der Knotenpunktpotentialanalyse Dieses Verfahren kann außer in der Elektrotechnik auch z. B. bei der Analyse von Wärmequellennetzwerken eingesetzt werden.

Knotenpunktpotentialgleichungen

Knotenpotentiale sind die elektrischen Potentiale an verschiedenen Knoten eines Netzwerks – relativ zu einem Referenzknoten. Die Differenz zweier Potentiale ist die Spannung zwischen den Knoten (**Bild 1**).

$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

Für den Strom – unter Verwendung der Potentialdefinition – ergibt sich:

$$I = \frac{U}{R}$$

$$I = U \cdot G$$

$$I = G \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Bei dem Knotenpunktpotentialverfahren wird ein System von Gleichungen aufgestellt, um die Potentiale an den Knoten eines Netzwerks zu bestimmen. Hierzu werden die folgenden fünf grundlegenden Analyseschritte durchgeführt:

- Ein Knoten des Netzwerks wird als Referenzknoten ausgewählt. An diesem Knoten wird das Potential als null definiert. Dieser Knoten entspricht somit der Masse des Systems. Die Auswahl des Knotens ist beliebig.
- Allen restlichen Knoten wird eine Variable zugeordnet, die das Potential relativ zum Referenzpunkt repräsentiert.
- Es werden die Knotenpunktpotentialgleichungen aufgestellt, die sich aus den Leitwerten der Widerstände und Quellen des Netzwerks ergeben.

Quelle: alle Bilder A. Baral

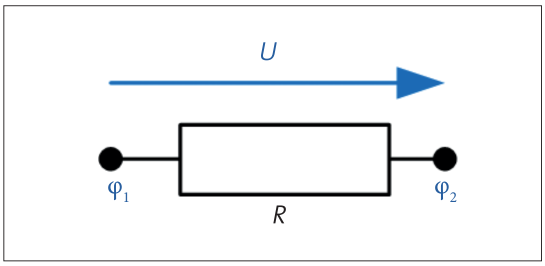


Bild 1: *Definition der Knotenpotentiale*

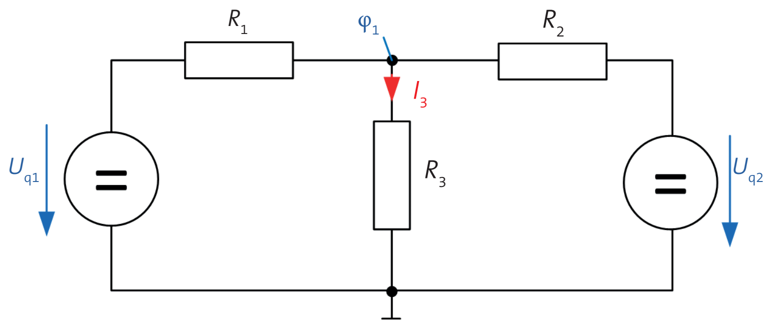


Bild 2: *Einfaches Netzwerk*

- Die Koeffizienten der Knotenpunktpotentialgleichungen werden in einem Gleichungssystem einsortiert.
- Mithilfe eines allgemeinen Lösungsverfahrens wird das Gleichungssystem gelöst.

An einem einfachen Netzwerk (**Bild 2**) werden die fünf Verfahrensschritte erläutert.

Aufstellen der Knotenpunktpotentialgleichungen

Ein einfaches, systematisches Vorgehen, das sich sowohl in der Elektrotechnik als auch für Wärmequellennetzwerken eignet, stellt die Wandlung aller Spannungsquellen in Stromquellen dar. Die Ströme der Stromquellen lassen sich mit nachfolgender Gleichung (vgl. »ema« 9.2024) bestimmen:

$$I_q = U_q \cdot G_i$$

$$I_q = \frac{U_q}{R_i}$$

Das umgewandelte Netzwerk aus Bild 2 ist in **Bild 3** dargestellt. Aus den Spannungsquellen U_{q1} und U_{q2} und den dazugehörigen seriellen Innenwiderständen R_1 und R_2 sind die Stromquellen I_{q1} und I_{q2} sowie die parallelgeschalteten Innenwiderstände R_1 und R_2 bzw. Leitwerte G_1 und G_2 geworden. Im nächsten Analyseschritt sind die Ströme (**Bild 4**) einzuzeichnen und die Knotengleichungen aufzustellen.

Der Knoten φ_0 wurde als Referenzpunkt mit dem Potential null definiert. Es ist somit in diesem Beispiel nur der Knoten 1 mit dem Potential φ_1 relevant. Die Summe der Ströme am **Knoten 1** ergibt:

$$I_{q1} - I_1 - I_2 - I_3 + I_{q2} = 0$$

Die Gleichung wird nun so umsortiert, dass die Quellen auf der einen Seite und die restlichen Ströme auf der anderen Seite stehen.

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_{q1} + I_{q2}$$

Für die einzelnen Widerstände ergeben sich folgende Ströme in Abhängigkeit von den Potentialen und unter Berücksichtigung des Referenzpotentials $\varphi_0 = 0\,V$:

$$I_1 = G_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_0) = G_1 \cdot \varphi_1$$
$$I_2 = G_2 \cdot (\varphi_1 - \varphi_0) = G_2 \cdot \varphi_1$$
$$I_3 = G_3 \cdot (\varphi_1 - \varphi_0) = G_3 \cdot \varphi_1$$

Werden die obigen Gleichungen in die Knotengleichung eingesetzt, ergibt sich:

$$G_1 \cdot \varphi_1 + G_2 \cdot \varphi_1 + G_3 \cdot \varphi_1 = I_{q1} + I_{q2}$$

Da dieses einfache Netzwerk nur eine Unbekannte, das Potential φ_1, aufweist, ist die Lösung sehr einfach aus obiger Gleichung zu ermitteln. In diesem Fall ist es nicht notwendig, ein Gleichungssystem zu lösen. Das unbekannte Potential φ_1 kann direkt aus den Stromquellen und Leitwerten des Netzwerks berechnet werden.

$$\varphi_1 = \frac{I_{q1} + I_{q2}}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Nachdem das Potential φ_1 bestimmt wurde, kann mithilfe der Potentialdifferenz der jeweilige Spannungsabfall und Strom durch die Widerstände ermittelt werden. Sollen die Ströme der originalen Spannungsquellen (Bild 2) ermittelt werden, so ergeben sie sich aus der Differenz der Ersatzstromquelle und dem Strom durch den Innenwiderstand.

Komplexeres Beispiel für ein Gleichungssystem

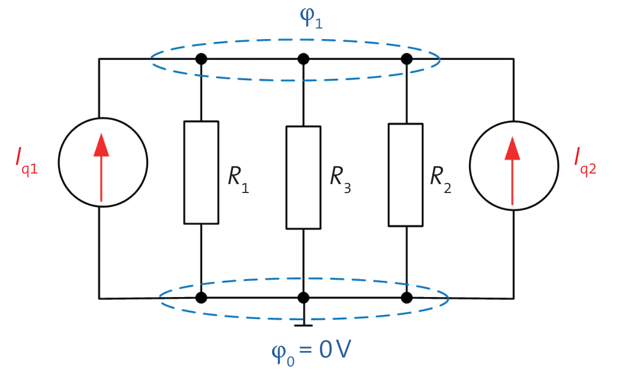
Zur Vertiefung des Themas wird an einem etwas komplexeren Beispiel (**Bild 5**) gezeigt, wie ein Knotenpunktpotential-Gleichungssystem aufgestellt wird. In dem Netzwerk in Bild 5 sind zwei unbekannte Potentiale vorhanden, daher ergeben sich zwei gekoppelte Gleichungen, die mithilfe eines Gleichungssystems gelöst werden können. Die Umwandlung der Spannungsquellen in Stromquellen ergibt das Netzwerk in **Bild 6**.

Im nächsten Analyseschritt sind die Ströme (**Bild 7**) einzuzeichnen und die Knotenpunktpotentialgleichungen aufzustellen. Hier sei erwähnt, dass die Stromrichtung beliebig gewählt werden kann. Es ist jedoch beim Aufstellen der Gleichungen darauf zu achten, dass Strom und Spannung in dieselbe Richtung zeigen (Verbraucher).

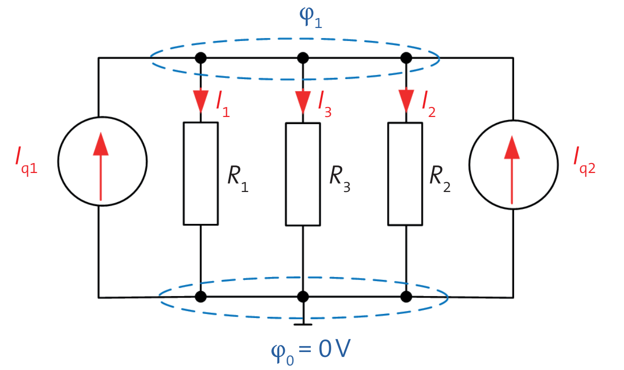
Bild 3: *Ersatznetzwerk mit Stromquellen*

Bild 4: *Definition der Stromrichtungen*

3



4



Knoten 1:

$I_1 + I_3 + I_5 = I_{q1}$
$I_1 = G_1 \cdot \varphi_1$
$I_3 = G_3 \cdot \varphi_1$
$I_5 = G_5 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$

Bei Ineinandersetzen der Gleichungen, ergibt sich die ***erste Knotenpunktpotentialgleichung***:
$(G_1 + G_3 + G_5) \cdot \varphi_1 - G_5 \cdot \varphi_2 = I_{q1}$

Knoten 2:

$I_2 + I_4 - I_5 = I_{q2}$
$I_2 = G_2 \cdot \varphi_2$
$I_4 = G_4 \cdot \varphi_2$
$I_5 = G_5 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$

Für die ***zweite Knotenpunktpotentialgleichung*** ergibt sich somit:
$(G_2 + G_4 + G_5) \cdot \varphi_2 - G_5 \cdot \varphi_1 = I_{q2}$
In beiden Gleichungen sind sowohl das Potential φ_1 als auch das Potential φ_2 eine unbekannte Größe. Aus den beiden Gleichungen kann nun ein Gleichungssystem der Dimension zwei erstellt werden:

$$\begin{bmatrix} (G_1+G_3+G_5) & -G_5 \\ -G_5 & (G_2+G_4+G_5) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \end{bmatrix}$$

Für die Lösung von Gleichungssystemen gibt es unterschiedliche Algorithmen wie z.B. den Gauß-Algorithmus oder die Cramer'sche Regel.

Lösung von Gleichungssystemen

Die Lösung von Gleichungssystemen unter Verwendung der Cramer'schen Regel basiert darauf, dass die unbekannten Potentiale mithilfe von *Determinanten* berechnet werden. Dabei wird das Gleichungssystem in eine *Matrixform* gebracht und die einzelnen Variablen (Potentiale) lassen sich durch das *Verhältnis der Determinanten* ermitteln.

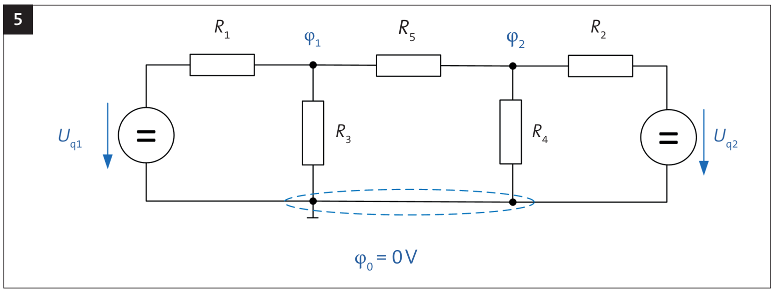
$$\varphi_1 = \frac{\det D_{\varphi_1}}{\det D}$$

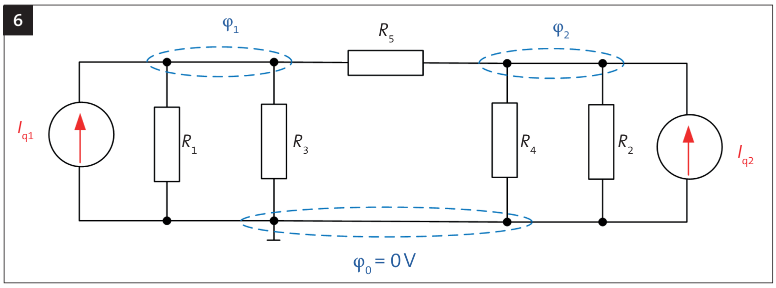
$$\varphi_2 = \frac{\det D_{\varphi_2}}{\det D}$$

Die Lösung einer Determinante ist eine skalare Zahl, die mit einer quadratischen Matrix verknüpft ist. Die Methode zur Berechnung der Determinante hängt von ihrer Größe ab. Für eine kleine 2 x 2-Matrix ergibt sich:

$$\det D = \det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Für größere Matrizen, wie beispielsweise eine 3 x 3-Matrix, wird die Berechnung aufwendiger und folgt der *Regel von Sarrus* oder dem *Laplace-Entwicklungssatz*, bei dem Determinanten von Untermatrizen gebildet werden. Für das obige Beispiel reicht jedoch die einfache Berechnung der 2 x 2-Matrix:





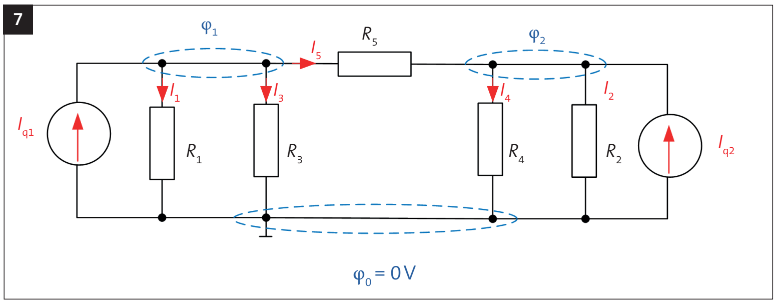


Bild 5: *Komplexeres Beispiel-Netzwerk*

Bild 6: *Netzwerk aus Bild 5 mit Stromquellen*

Bild 7: *Definition der Stromrichtung*

$$\det D = \det\begin{vmatrix} (G_1+G_3+G_5) & -G_5 \\ -G_5 & (G_2+G_4+G_5) \end{vmatrix}$$
$$= (G_1+G_3+G_5)\cdot(G_2+G_4+G_5) - (-G_5)^2$$

Die Matrix $D_{\varphi 1}$ setzt sich aus dem Quellenvektor und der restlichen Leitwertmatrix D zusammen:

$$\det D_{\varphi_1} = \det\begin{vmatrix} I_{q1} & -G_5 \\ I_{q2} & (G_2+G_4+G_5) \end{vmatrix}$$
$$= I_{q1}\cdot(G_2+G_4+G_5) - I_{q2}\cdot(-G_5)$$

Analog zur Determinanten $\det D_{\varphi 1}$ erfolgt die entsprechende Berechnung der Determinante $\det D_{\varphi 2}$. Es ist jedoch zu beachten, dass der Quellenvektor nun in die zweite Spalte einsortiert wird:

$$\det D_{\varphi_2} = \det\begin{vmatrix} (G_1+G_3+G_5) & I_{q1} \\ -G_5 & I_{q2} \end{vmatrix}$$
$$= I_{q2}\cdot(G_1+G_3+G_5) - I_{q1}\cdot(-G_5)$$

Für die beiden Knotenpunktpotentiale φ_1 und φ_2 ergibt sich aus dem Quotienten der Determinanten :

$$\varphi_1 = \frac{I_{q1}\cdot(G_2+G_4+G_5) - I_{q2}\cdot(-G_5)}{(G_1+G_3+G_5)\cdot(G_2+G_4+G_5) - (-G_5)^2}$$

$$\varphi_2 = \frac{I_{q2}\cdot(G_1+G_3+G_5) - I_{q1}\cdot(-G_5)}{(G_1+G_3+G_5)\cdot(G_2+G_4+G_5) - (-G_5)^2}$$

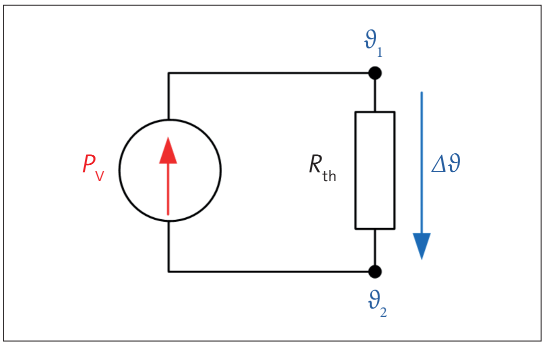


Bild 8: Thermisches Netzwerk

Da das Potential $\varphi_0 = 0\,\text{V}$ ist, entsprechen die Potentiale φ_1 und φ_2 den Spannungen über den Widerständen R_1 bis R_4. Die Differenz der beiden Potentiale ergibt die Spannung am Widerstand R_5. Mithilfe des Ohm'schen Gesetzes lassen sich nun einfach die Ströme ermitteln. Zur Veranschaulichung und Vertiefung des Verfahrens gibt es im Online-Beitrag (**www.elektro.net/126183**) ein detailliertes Zahlenbeispiel, das Schritt für Schritt die Anwendung und Berechnung verdeutlicht.

Anwendung der Knotenpunktpotentialanalyse bei thermischen Analysen

Eine thermische Analyse, beispielsweise einer elektrischen Maschine oder eines Gebäudes, kann mithilfe von Wärmequellennetzwerken durchgeführt werden. Dabei werden die auftretenden Verlustleistungen als Wärmequellen betrachtet, die den Stromquellen in elektrischen Netzwerken entsprechen. Der Temperaturabfall ergibt sich aus der Temperaturdifferenz zwischen den Temperaturpotentialen. In **Bild 8** ist ein sehr einfaches thermisches Netzwerk dargestellt, das aus einer Wärmequelle, die beispielsweise die Kupferverlustleistung P_V einer elektrischen Maschine repräsentieren kann, sowie einem thermischen Widerstand besteht.

In Anlehnung an das elektrische Netzwerk und das Ohm'sche Gesetz kann die Temperaturdifferenz in einem

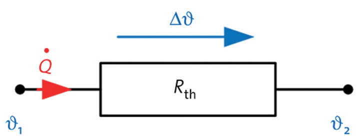
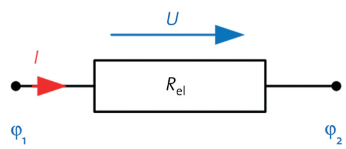
Berichtigung zum Teil 6 der Reihe »Grundlagen der Elektrotechnik«

Ein Leser machte uns darauf aufmerksam, dass im vorangegangenen Beitrag »Das Superpositionsprinzip« in »de« 20.2024 ab Seite 67 mehrere Fehler enthalten sind:

- Im Bild 1 auf S. 67 unten fehlt die Bildunterschrift. Hier müsste zusätzlich noch »Bild 1: Strom- und Spannungsquelle« stehen
- In den Bildern 2 und 3 auf S. 68 oben steht fälschlicherweise die Bezeichnung »R_{iV}« statt »R_V« am Lastwiderstand, die Berechnungen auf derselben Seite beziehen sich jedoch immer auf »R_V«, was auch korrekt ist
- Ebenso auf Seite 68 steht in der rechten Spalte im vorletzten Absatz »Im konkreten Beispiel des Netzwerks in Bild 1…«; hier müsste es Bild 4 heißen; die daraus folgenden Teilsysteme werden dann in den Bildern 5 und 6 demonstriert.

Die Fehler im Online-Beitrag sind bereits korrigiert, das dazugehörige Download-PDF ebenfalls. Danke für Ihre Mithilfe an unserer Zeitschrift, dafür sind wir immer sehr dankbar!

Tabelle 1: Analogie thermischer und elektrischer Größen

Thermische Größen	Elektrische Größen
Wärmestrom $Q[W]$	Elektrischer Strom I [A]
Wärmefluss, Wärmestromdichte $\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$	Stromdichte $J = \frac{I}{A} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2}\right]$
Temperatur ϑ [K; °C]	Elektrisches Potential φ [V]
Temperaturdifferenz Δϑ = ϑ1 – ϑ2 [K; °C]	Elektrische Spannung U = φ1 – φ2 [V]
Thermischer Leitwert $L_{th} = \lambda \cdot \frac{A}{s} \left[\frac{\text{W}}{\text{K}}\right]$ • λ: Wärmeleitfähigkeit • A: Schichtquerschnitt (steht senkrecht zum Wärmestrom) • S: Schichtdicke	Elektrischer Leitwert $G_{el} = \sigma \cdot \frac{A}{\ell} \left[\frac{\text{A}}{\text{V}} = \text{S}\right]$ • σ: elektrische Leitfähigkeit • A: Leiterquerschnitt • l: Leiterlänge
Thermischer Widerstand $R_{th} = \frac{1}{L_{th}} \left[\frac{\text{K}}{\text{W}}\right]$  $R_{th} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\dot{Q}} = \frac{\Delta\vartheta}{\dot{Q}}$	Elektrischer Widerstand $R_{el} = \frac{1}{G_{el}} \left[\frac{\text{V}}{\text{A}}\right]$  $R_{el} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{I} = \frac{U}{I}$

thermischen Netzwerk auf ähnliche Weise wie die Spannung in einem elektrischen Netzwerk betrachtet werden. Entsprechend dem Prinzip des Ohm'schen Gesetzes für Wärmeübertragung wird die Temperaturdifferenz durch das Produkt des thermischen Widerstands und des Wärmeflusses (vergleichbar mit dem Strom in elektrischen Netzwerken) bestimmt:

$$\Delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2 = P_V \cdot R_{th}$$

bzw. mit dem Leitwert:

$$P_V = \frac{\Delta\vartheta}{R_{th}} = \Delta\vartheta \cdot L_{th}$$

Bei thermischen Größen entspricht die Leistung P_V dem sogenannten Wärmestrom $\dot{Q}[W]$ (Wärmeleistung). In **Tabelle 1** sind die Analogien zwischen einem elektrischen und einem thermischen Ersatzschaltbild übersichtlich dargestellt. Diese Tabelle ermöglicht es, jedes thermische Wärmequellennetzwerk in ein entsprechendes elektrisches Netzwerk zu überführen. Die Struktur eines thermischen Netzwerks entspricht dabei der eines elektrischen Netzwerks, sodass dieselben Prinzipien und Methoden angewendet werden können. Insbesondere kann das Knotenpunktpotentialverfahren, das üblicherweise für elektrische Netzwerke verwendet wird, auch auf thermische Netzwerke angewendet werden, um die Temperaturverteilungen zu berechnen.

Mit diesem Überblick über die Berechnung kleiner elektrischer Netzwerke und die Anwendung der thermischen Analogie endet die Beitragsreihe zur Analyse von Gleichstromnetzwerken. Im nächsten Grundlagenbeitrag wird das elektrische Feld ausführlich erläutert.

(Ende der Beitragsreihe)

FÜR SCHNELLLESER

Umfangreichere Netzwerke lassen sich nur mit Hilfe von Netzwerkanalyseverfahren und den daraus resultierenden Gleichungssystemen lösen – eines davon ist das Knotenpunktpotentialverfahren, welches im Beitrag vorgestellt wird

Im Fokus steht dabei die Cramer'sche Regel, mit der man unbekannte Potentiale mithilfe von Determinanten berechnen kann – dabei wird das Gleichungssystem in eine Matrixform gebracht

Alle Beiträge der Reihe

- **1** »de« 8.2024:
  »Die Geschichte der Elektrotechnik«
- **2** »de« 10.2024:
  »Batterien und Elektronenströmung«
- **3** »de« 12.2024:
  »Der elektrische Gleichstromkreis«
- **4** »de« 15-16.2024:
  »Einfache Widerstandsnetzwerke«
- **5** »de« 18.2024:
  »Die DMS-Messbrücke«
- **6** »de« 20.2024:
  »Das Superpositionsprinzip«
- **7** »de« 22.2024:
  »Das Knotenpunktpotentialverfahren«